Pytania i zadania na egzamin.

1. Wypowiedzieć treść twierdzenia podstawowego rachunku całkowego:
Jeżeli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ oraz

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

to $F'(x) = f(x)$ dla dowolnego x w $[a, b]$.
Na podstawie twierdzenia proszę wykazać, że jeżeli funkcja $G(x)$ jest funkcją pierwotną dla f w przedziale $[a, b]$, to $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.
2. Podac definicję normalnego ciągu podziałów przedziału, sum całkowych (mogą być tylko sumy pośrednie) oraz całki oznaczonej. Na podstawie definicji całki oznaczonej pewnej funkcji obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{n^4}.$$

3. Przedstawić twierdzenie o zmianie zmiennej w całce oznaczonej (najlepiej wersję z wykładu). Zastosować do całki

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{x^2 + 3}\, dx.$$

4. Podać definicję pola figury płaskiej. Podać wzór na pole figury, ograniczonej wykresami dwóch funkcji ciągłych.
5. Obliczyć objętość stożka ściętego o promieniach podstaw $R > r > 0$ i wysokości h na dwa sposoby - jako skutek obrotu wokół osi Ox i Oy wykresów pewnych funkcji.
6. Obliczyć na podstawie całki moment bezwładności jednorodnego (czyli o stałej gęstości wszędzie) walca względem jego osi obrotu. Wzór to $I = \frac{1}{2}mr^2$. Można wyjść od pierścieni o gubości Δx_i i promieniu wewnętrznym x_i, gdzie x_i to wyrazy ciągu podziałów przedziału $[0, r]$. Taki pierścień ma w przybliżeniu moment $\Delta m_i x_i^2$, gdzie Δm_i to jego masa.
7. Wykazać, że funkcja $f(x, y) = x^3y^3$ nie posiada ekstremum lokalnego w punkcie $(0, 0)$. W tym celu wystarczy wykazać, że w każdym otoczeniu tego punktu są inne punkty, w których funkcja ma wartości dodatnie, a także takie, w których funkcja ma wartości ujemne. Podać twierdzenie mówiące o tym, przy jakich założeniach funkcja posiada ekstremum lokalne (chodzi więc o warunek wystarczający ekstremum).
8. Napisać wzór Taylora dla funkcji 2 zmiennych z resztą R_2. Oszacować tę resztę dla funkcji $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$, gdzie $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $x = y = 0.01$.
9. Obliczyć całki z różniczek dwumiennych:
a)

$$\int \sqrt[3]{3x - x^3}\, dx$$

b)

$$\int \sqrt[3]{x}\, \sqrt[4]{\sqrt[3]{x} - 1}\, dx$$

10. Podać treść twierdzenia o funkcji uwikłanej. Zastosować do obliczenia pochodnej funkcji uwikłanej $y(x)$ w punkcie $x = 1$, danej równaniem

$$y \cos y + x \ln x = 0,$$

której wykres przechodzi przez punkt $(1, 0)$. Najpierw trzeba wykazać istnienie tej funkcji.

11. Podać definicję pochodnej cząstkowej i jej interpretację, a także obliczyć podaną pochodną (będzie podana).

12. Podać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równania różniczkowego typu ogólnego $y' = f(x, y)$ z zadanym warunkiem początkowym oraz analogiczne twierdzenie dla równania o rozdzielonych zmiennych. Dla równania o rozdzielonych zmiennych podać uwikłaną postać rozwiązania (była w dowodzie twierdznia, zawiera dwie całki oznaczone).

13. Czym jest zbiór rozwiązań równania różniczkowego liniowego jednorodnego rzędu 2(ewentualnie rzędu n)? Podać twierdzenie mówiące o postaci przestrzeni rozwiązań równania niejednorodnego rzędu 2(ewentualnie rzędu n).

14. Metodą uzmienniania stałych rozwiązać równanie (czyli podać rozwiązanie ogólne)

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$