Liczby zespolone 3.

1.Rozwiązać równania kwadratowe i dwukwadratowe w zbiorze liczb zespolonych, tzn. znaleźć ich zespolone rozwiązania, (wzory z deltą są aktualne):

a) $iz^2 + z + 2 = 0$

b) $z^2 + iz - i = 0$

c) $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$

d) $z^4 - z^2 + 1 = 0$

2. Rozwiązać równanie

$$z^4 = (4 - 3i)^2$$

3. Wyznaczyć $\sqrt[3]{1-i}$. Wskazówka: Argument liczby w_0 będzie ułamkiem o mianowniku 12. Sposób I: można go rozbić na sumę (albo różnicę) ułamków o mianownikach 3,4 albo 2,6 i zastosować wzory na $sin(a+b)$ i $cos(a+b)$ sumy (lub różnicy). Sposób II: Jednym z pierwiastków, niekoniecznie w_0, będzie liczba o przyzwoitym argumencie. Jeżeli ją wyznaczymy, to pozostałe można wyliczyć, stosując liczbę ϵ_3, czyli obrót o $2\pi/3$.
4. **Postać wykładnicza**. Definiujemy

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

dla rzeczywistej liczby x. Zauważmy, że ze wzorów na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej wynika, że tak określone potęgowanie ma normalne własności, tzn. $e^{ix+iy} = e^{ix}e^{iy}$ oraz $e^{ix-iy} = e^{ix}/e^{iy}$. Mamy też, co łatwo sprawdzić, $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = e^{\overline{ix}}$. Wynikają stąd tzw. wzory Eulera:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{oraz} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Proszę wyprowadzic te wzory na podstawie powyższej definicji.

5. Na podstawie wzorów Eulera wyznaczyć $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos^4 x$ i $\sin^4 x$ przy pomocy pierwszych potęg sinusa i cosinusa, ale dla wielokrotności kąta x. W pierwszych 2 przypadkach otrzymamy znane wzory "połówkowe".

6.** Można na podstawie wzorów Eulera i wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego rozwiązać zadanie 8.43 z Krysickiego. Jest to dość skomplikowane rachunkowo.

7. **Macierze**. Proszę na podstawie wykładu i innych źródeł nauczyć się mnożenia macierzy. Proszę spróbować rozwiązać zadania z: Krysicki, Włodarski tom 1 (*Analiza matematyczna w zadaniach.*). Odpowiedzi są na końcu zbioru.
a) 9.69 - 9.74 dotyczące iloczynu macierzy. Można zaobserwować ciekawe efekty w zadaniach 71-73, które mozna opisać w języku **wierszy**.
b)* Proszę zaproponować mnożenia, które dadzą podobne efekty dla kolumn, co mnożenia z zadań 71-73.
c) 9.83
d) 9.101 - 103
e) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć iloczyny AB i BA.
f) czy jest możliwe, że $AB = 0$ dla niezerowych macierzy A i B?

8. Proszę spróbować zrozumieć na podstawie wykładu i innych źródeł definicje wyznacznika i rzędu macierzy. Uwaga, definicje w różnych podręcznikach mogą się pozornie różnić, ale przedstawiają one jednak jedno pojęcie. Nic nie szkodzi, gdy ktoś znajdzie inną definicję.