Przykładowy zestaw zadań na kolokwium.

1. Udowodnić za pomocą indukcji matematycznej, że

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_+} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2}_{1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + n(n+1)^2} = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

2. Wyznaczyć granice ciągów

$$a_n = n + \sqrt[3]{1+n^2-n^3},$$

$$b_n = \sqrt[n]{5^n + 3^{2n} + 2^{3n}}$$

3. Wyznaczyć granice ciągów, posługując się odpowiednimi twierdzeniami (twierdzeniem) o liczbie Eulera. Podać treść tego twierdzeń:

$$a_n = \left(\frac{n^2+n}{n^2+5}\right)^n; \qquad b_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n}$$

Wskazówka do a_n: zapisać $\frac{n^2+n}{n^2+5} = \frac{n^2+5-5+n}{n^2+5} = 1 + \frac{n-5}{n^2+5}$

4. Wyznaczyć granice funkcji:

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 3x^3 + 5x - 3}{2x^3 + 5x^2 - 7x}$$

b) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{\sin 4\pi x}$$

5. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} (1-ax)^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0 \\ 3 & \text{dla } x = 0 \\ \log_b (x-a) & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$. Odpowiedź uzasadnić.