

(Dwa zadania obliczeniowe, np. szukanie parametrów krzywej, obliczenie  $\kappa$  i  $\tau$  i wyznaczenie ewentualnych wniosków o krzywej, obliczenie  $\kappa$  i  $\tau$  dla krzywej w postaci uwikłanej). Pozostałe 2 zadania z powyższej listy.

1. Wykazać, że jeśli  $\gamma$  zawiera się w sferze o promieniu  $R$ , to  $\kappa \geq \frac{1}{R}$  w każdym jej punkcie.
2.  $\gamma = \gamma(s)$ .  $\alpha(s) := \gamma(s) - s\gamma'(s)$ . Obliczyć  $\kappa_\alpha$  w zależności od  $s, \kappa_\gamma$  i  $\tau_\gamma$ . Tutaj „ $s$ ” to parametr tutowy krzywej  $\gamma$ .
3. Zakładamy, że  $\gamma$  nie ma punktów wyprostowania oraz styczne tworzą z ustaloną prostą  $l$  kąt stały, to normalne główne (równoległe do  $N$ ) są prostopadłe do  $l$ , a binormalne ( $\parallel B$ ) tworzą z  $l$  kąt stały. (Gdowski)
4. Jeżeli między punktami krzywych  $\alpha$  i  $\beta$  istnieje bijektywna odpowiedniość taka, że w punktach sobie odpowiadających obie krzywe mają wspólną normalną główną, to odległość tych punktów jest stała, a także kąt między stycznymi w tych punktach jest stały.
5.  $\gamma = \gamma(s)$  - krzywa. Wykazać, że jeżeli proste normalne do  $\gamma$  (czyli równoległe do  $N_\alpha(s)$  przechodzące przez  $\alpha(s)$ ) przechodzą przez ustalony punkt, to krzywa jest zawarta w okręgu.
6. Wykazać, że jeśli płaszczyzny normalne (czyli  $\perp B$ ) do  $\gamma$  przechodzą przez jeden punkt, to  $\gamma$  jest zawarta w sferze.
7. Niech  $\kappa_\gamma \neq 0$  w punkcie  $P$ . Wykazać, że krzywa  $\alpha$  powstaje jako kat  $\gamma$  na płaszczyźnie ściśle stycznej do  $\gamma$  w  $P$  ma krzywizną w  $P$  równą  $\kappa_\gamma$  w  $P$ .

8.  $\alpha = \alpha(s)$  - tutowo sparametryzowana krzywa w  $\mathbb{R}^3$ .

Niech  $\beta(s) = \alpha(s) - s\alpha'(s)$  (czyli  $\beta$  - ewolwenta  $\alpha$ ).

Wykazać, że jeśli  $\beta$  jest zawarta w płaszczyźnie,

to  $\alpha$  jest uogólnioną linią śrubową.

( $\beta' = \alpha' - \alpha'' - s\alpha'''$  - przekształć: namnożyć  $\tau = 0$ )

9.  $\alpha = \alpha(s)$  - krzywa sparametryzowana krzywymi, spełniająca warunek  $\kappa \neq 0$ . Udowodnić, że  $\alpha$  jest krzywą zwykłą  $\Leftrightarrow \alpha'' \cdot (\alpha''' \times \alpha^{(4)}) = 0$ .

10. Wykazać, że krzywa, która jest bez punktów wyprostowania i spełnia warunek  $\kappa \neq 0$  leży na sferze  $\Leftrightarrow \frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)' = 0$

11. Wykazać, że jeżeli  $\gamma$  jest krzywą bez punktów wyprostowania, to jest ona ULŚ  $\Leftrightarrow \alpha'' \cdot (\alpha''' \times \alpha^{(4)}) = 0$ .

12. Niech  $\gamma$  - ULŚ, a wektor  $v$  ma własności  $T \cdot v = \text{const.} \neq 0$ .

Niech  $\beta$  będzie rzutem  ~~$\alpha$~~  na płaszczyznę prostopadłą do  $v$ .

Udowodnić, że normalne główne,  $N_\gamma$  i  $N_\beta$  w odpowiadających sobie punktach (punkt i jego rzut) są równoległe.

Obliczyć  $\kappa_\beta$  w zależności od  $\kappa_\gamma$ .