# Zadania z granic ze szkicami rozwiązań.

5.20 Treść powinna być $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

5.22 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = 4+4+4 = 12,$

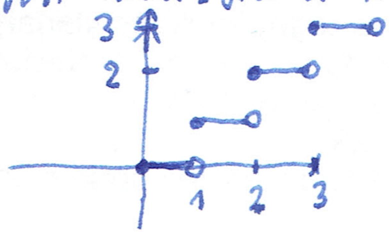
bo tu granica jest wartość wielomianu $x^2+2x+4$ w punkcie 2, co wynika z ciągłości wielomianów.

5.28 $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^3+125}{2x^2-50}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -5}\frac{\cancel{(x+5)}(x^2-5x+25)}{2\cancel{(x+5)}(x-5)} = -7,5$

↑ zera oznaczają, że wielomiany zerują się w $-5$, czyli dzielą się przez $x+5$

5.31. Funkcja $[x]$ jest nieciągła w $x=3$

Jej wykres:




Zatem $\lim\limits_{x\to 3^-}[x] = 2$, $\lim\limits_{x\to 3^+}[x] = 3$

Dlatego $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \frac{(-1)^2}{6} = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \frac{(-1)^3}{6} = -\frac{1}{6}$

5.32 $\left[\frac{0}{0}\right]$ Proponuję definicję Heinego. Bierzemy dowolny ciąg $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$. $t_n := \sqrt[3]{1+mx_n} \Rightarrow t_n\to 1$

$\Rightarrow$ Mamy też dla $m\neq 0$ $x_n = \frac{t_n^3-1}{m}$ oraz

$$\frac{\sqrt[3]{1+mx_n}-1}{x_n} = \frac{m(t_n-1)}{\cancel{m}(t_n^3-1)} = \frac{m}{t_n^2+t_n+1} \longrightarrow \frac{m}{3}$$

i taka jest szukana granica. Dla $m=0$ osobno sprawdzamy, że wynosi ona 0.

5.33 Stosujemy wzór

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

5.35
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2+1-x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1-x-1}{1+\sqrt{x+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1+\sqrt{x+1}}{-\cancel{x}} = \frac{-2}{-2} = +1$$

5.38. Stosujemy twierdzenie:

jeżeli $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ i $f(x) \neq 0$ w sąsiedztwie $x_0$,

to $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$. Łatwo je udowodnić z def. Heinego zastosowanej do $f(x)$ i $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3\sin 2x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4}{3\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\to 1$, bo $\lim_{x\to 0} 2x = 0$

5.41.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = 1, \text{ bo}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0.$$

5.47.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}}{2\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}\underbrace{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}_{= -\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(-\mathrm{tg}\,\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}\right) = \left(-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

5.49. $\left[\frac{0}{0}\right]$ z def. Heinego. Bierzemy $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$,

$\alpha_n := \mathrm{arctg}\, x_n \to \mathrm{arctg}\, 0 = 0$
↑ z ciągłości arctg.

$\Downarrow$ $x_n = \mathrm{tg}\,\alpha_n$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{arctg}\, x_n}{x_n} = \frac{\alpha_n}{\mathrm{tg}\,\alpha_n} = \frac{\alpha_n \cos\alpha_n}{\sin\alpha_n} \to 1$$

$\cos\alpha_n \to \cos 0 = 1$ z ciągłości kosinusa

$\frac{\alpha_n}{\sin\alpha_n} \to 1$ z def. Heinego dla $\frac{\sin x}{x}$

5.51. Zauważyć, że prawdziwe jest twierdzenie:
jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i $f(x) \neq 0$ w sąsiedztwie $x_0$,
to $\lim\limits_{x\to x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$. Wynika ono stąd, że
$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Teraz $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \left((1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\frac{\sin x}{x}} =$
$= e^1 = e$.

5.60. Ciągłość $f(x) = [x]+[-x]$.
1) W każdym punkcie $x_0 \in (k, k+1)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
punkt ten zawiera się wraz z pewnym otoczeniem
w tym przedziale: $x_0 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (k, k+1)$
Wtedy w sąsiedztwie punktu $x_0$, $[x] = k$, $[-x] = -k-1$,
a więc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k-k-1 = -1$

tzn. dla $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$

Z kolei $f(x_0) = k-k-1 = -1$ i $f$ jest
ciągła w tym punkcie $x_0$.
Gdy $x_0 = k \in \mathbb{Z}$, to $\lim\limits_{x\to x_0^-} [x]+[-x] = \lim\limits_{x\to k^-} [x]+[-x] =$
$= k-1+(-k) = -1$. Ale $f(k) = [k]+[-k] = k-k = 0$
i w takich punktach $f$ nie jest ciągła.

<u>Zad</u> Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x<0 \\ 3 & \text{dla } x=0 \\ b^2 - e^{\frac{b}{x}} & \text{dla } x>0 \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$?

Jeszcze 5.64. Wskazówka: $\frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x}$
i dalej już łatwo