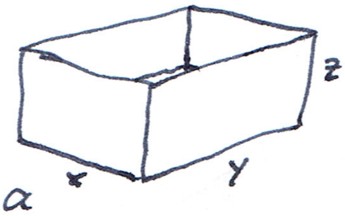
Dokładne rozwiązanie zadania o treści:

Jakie są wymiary pojemnika w kształcie prostopadłościanu, ale bez jednej ściany, ~~by miał~~ który ma ~~on~~ pojemność V i możliwie najmniejszą powierzchnię nieskończenie cienkiej blachy, z której jest wykonany?



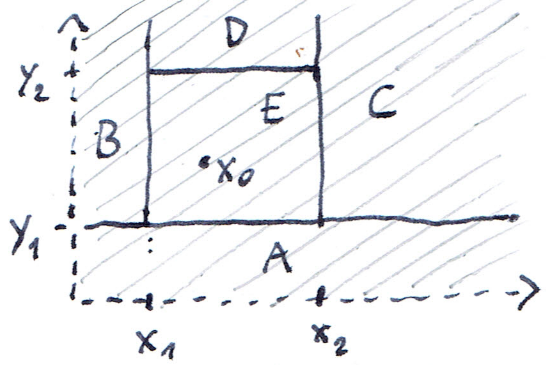
$V = xyz$, $P = xy + 2yz + 2xz$

$$\Rightarrow \quad P = P(x,y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$ - funkcja 2 zmiennych o dziedzinie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

W jakim punkcie funkcja P może mieć minimalną wartość?
Tylko w takim, w którym ma ekstremum lokalne (minimum lokalne). Taki punkt spełnia warunek:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \iff \begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V} \\ y = \sqrt[3]{2V} \end{cases}$$

Niech to będzie punkt X_0.
Teraz dziedzinę dzielimy, jak na rysunku, na 5 zbiorów.



Każdy zbiór zawiera odcinki lub półproste zaznaczone ciągłą linią. Przyjmujemy:

$$x_1 = y_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{108}}, \quad x_2 = y_2 = \sqrt[3]{8 \cdot 108^2 \cdot V}$$

Obliczamy $P(X_0) = P(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{108 V^2}$.

W zbiorze A: $P(x,y) > \frac{2V}{y} \geqslant \frac{2V}{y_1} = 2\sqrt[3]{\frac{V^3}{V/108}} = 2\sqrt[3]{108V^2} = 2P(X_0)$

$(y \leqslant y_1) \Rightarrow \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{y_1}$

Analogicznie w B, $x \leqslant x_1$, $P(x,y) > \frac{2V}{x} \geqslant \frac{2V}{x_1} = 2P(X_0)$

W zbiorze C, $\begin{cases} x \geqslant x_2, \\ y \geqslant y_1 \end{cases}$ $P(x,y) > xy \geqslant x_2 y_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{108} \cdot 8 \cdot 108^2 \cdot V} = 2\sqrt[3]{108V^2} = 2P(X_0)$

Podobnie w D $y \geqslant y_2$, $x \geqslant x_1$ i $P(x,y) \geqslant 2P(X_0) \Rightarrow$ w A, B, C, D nie ma wartości mniejszej niż w X_0.

Ponieważ ciągła funkcja P przyjmuje wartość minimalną w domkniętym i ograniczonym zbiorze E i nie przyjmuje jej na obwodzie (czyli brzegu) tego prostokąta, gdyż tam ma wartości co najmniej $2 \cdot P(X_0)$, więc musi ją przyjmować wewnątrz E, w punkcie, w którym ma jakieś minimum lokalne. Jedynym takim punktem jest punkt X_0.

Zatem wymiary pojemnika ...