Przykładowe rozwiązania na podstawie wykładu i ćwiczeń:

1. Granica ciągu.

$$b_n=\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+n}\right)^{3n}=\left(\frac{2n^2+n-n+3}{2n^2+n}\right)^{3n}=\left[\left(1+\frac{-n+3}{2n^2+n}\right)^{\frac{2n^2+n}{-n+3}}\right]^{\frac{3n(-n+3)}{2n^2+n}}$$

Sprawdzamy lub po prostu zauważamy, że

$$\frac{-n+3}{2n^2+n}\to 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{3n(-n+3)}{2n^2+n}\to -\frac{3}{2}.$$

Korzystamy z twierdzenia:

jeżeli $a_n\to 0$ i $a_n\neq 0$, to $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\to e$.

Stąd wynika, że $b_n\to e^{-\frac{3}{2}}$.

2. Monotoniczność i ekstrema.

Twierdzenie: jeżeli $f'(x)>0$ w (a,b), to f rośnie w (a,b).
i podobnie, jeżeli $f'(x)<0$ dla $x\in(a,b)$, to f maleje w (a,b).

Np. $f(x)=x+\frac{1}{3}\ln(x-3)^2-\frac{1}{3}\ln(x^2)$

Proszę to porównać ze swoimi sposobami i czy wyniki zgodzą się

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{3,0\}$

$$f'(x)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2(x-3)}{(x-3)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2}=$$

$$=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{3x^2-9x+2x-2x+6}{3x(x-3)}=\frac{x^2-3x+2}{x(x-3)}=$$

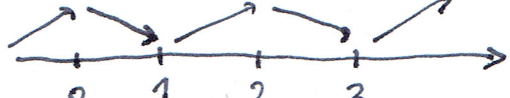
$$=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)}$$

Rozwiązujemy nierówność $f'(x)>0$:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)}>0 \quad \Big|\cdot x^2(x-3)^2$$

$$x(x-3)(x-1)(x-2)>0$$

Stąd i analogicznie rozwiązanej nierówności $f'(x)<0$:



- monotoniczność widać,
- maksimum lok. w $x=2$