Eliminacja Gaussa

Układ:
$$\begin{cases} 5x+3y+2z +2u=1 \\ 3x+2y+4z+3t+3u=1 \\ 4x+3y+2z+5t+2u=1 \\ 2x+y+6z+t+4u=1 \end{cases}$$

Zapisujemy go („kodujemy") jako macierz (blokową)

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccccc} 5&3&2&0&2 \\ 3&2&4&3&3 \\ 4&3&2&5&2 \\ 2&1&6&1&4 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1\\1\\1\\1 \end{array} \end{array}\right]}_{AU}$$

Operacje elementarne na jej wierszach odpowiadają operacjom na całych równaniach (pomnożenie stronami, dodanie stronami lub odjęcie, zamiana równań miejscami).

Sposób I Dążymy do uzyskania zer poniżej przekątnej, uzyskamy przy okazji informację o rzędach A i AU.

1. operacje: $w_1 - w_3$ ← w celu uzyskania „1" na pozycji a_{11}.
   $w_3 - w_2$

2. $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&-5&0&0&0 \\ \boxed{3}&2&4&3&3&3&1 \\ \boxed{1}&1&-2&2&2&-1&0 \\ \boxed{2}&1&6&1&1&4&1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2-3w_1 \\ w_3-w_1 \\ w_4-2w_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-5&0&0 \\ 0&\boxed{2}&4&3&3&1 \\ 0&1&-2&2&-1&0 \\ 0&1&6&1&4&1 \end{array}\right]$$

zamiast „2" chcemy mieć „1", np. zamieniamy $w_2 \longleftrightarrow w_3$ (lub $w_2 - w_3$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-5&0&0 \\ 0&1&-2&2&-1&0 \\ 0&\boxed{2}&4&3&3&1 \\ 0&\boxed{1}&6&1&4&1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3-2w_2 \\ w_4-w_2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-5&0&0 \\ 0&1&-2&2&-1&0 \\ 0&0&8&-1&5&1 \\ 0&0&8&-1&5&1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$w_4 - w_3$ daje same zera, czyli równanie $0=0$, które możemy pominąć

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \boxed{\begin{array}{ccc} 1&0&0 \\ 0&1&-2 \\ 0&0&8 \end{array}} & \begin{array}{cc} -5&0 \\ 2&-1 \\ 4&5 \end{array} & \begin{array}{c} 0\\0\\1 \end{array} \end{array}\right]$$

zaznaczona macierz ma rząd 3, wyznacznik $\neq 0$, skąd rz $A = 3$, rz $AU = 3$

i możemy rozwiązać układ względem zmiennych x, y, z przy dowolnie wybranych t i u, które zwyczajowo zapisujemy $t = \alpha$, $u = \beta$ i traktujemy jako parametry. Przechodząc do zwykłej postaci:

$$\begin{cases} x-5\alpha=0 \\ y-2z+2\alpha-\beta=0 \\ 8z+4\alpha+5\beta=1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t=\alpha \\ u=\beta \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\alpha \\ y=-2\alpha+\beta+2\left(\frac{1}{8}(1-4\alpha-5\beta)\right)=\ldots \\ z=\frac{1}{8}(1-4\alpha-5\beta) \\ t=\alpha,\quad u=\beta \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Sposób II   Dążymy do uzyskania tzw. kolumn bazowych, czyli posiadających tylko 1 element $\neq 0$. Kolumny te muszą tworzyć podmacierz macierzy współczynników o niezerowym wyznaczniku, czyli elementy niezerowe są na różnych miejscach w kolumnach. Operacje i zapis jak w Sposobie I:

1. Widzę „1" na miejscu a_{42}, a więc zeruję pozostałe elementy kolumny 2 i operacje: $w_1 - w_3, w_2 - 2w_4, w_3 - 3w_4$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -8 & 1 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & -16 & 2 & -10 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \quad w_3 - 2w_2 \text{ daje } 0=0 \text{ i to skreślamy}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -8 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 + w_1 \\ w_3 - 2w_1 \end{array}$$

kolumna bazowa

tu mogę uzyskać drugą, np. pozostawiając $a_{11} = 1$, a na pewno nie a_{31}!.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 11 & \underbrace{4} & 1 \end{array}\right] 5w_3 + 4w_2 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 39 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2 kolumny bazowe

tu będzie trzecia w oparciu o „-5"

Są 3 kolumny bazowe,

zatem rz $A = 3$, rz $AU = 3$

Układ mogę (szybko!) rozwiązać względem x, y, u, parametrami będą z i t. Przenosimy $z = \alpha$, $t = \beta$ na prawą stronę w każdym równaniu i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 5\beta \\ -5u = -1 + 8\alpha + 4\beta \\ 5y = 1 + 2\alpha - 39\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

Porządkując, otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 5\beta \\ y = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\alpha - \frac{39}{5}\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \\ u = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}\alpha - \frac{4}{5}\beta \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 1 \\ 0 \\ -8/5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 5 \\ -39/5 \\ 0 \\ 1 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$