ĆWICZENIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ – ZADANIA

INDUKCJA MATEMATYCZNA

1. Udowodnić za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

   e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   f) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

   g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

   h) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$

   j) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

   k) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

   l) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

   m) $\sum_{k=1}^{n}(4k-3) = n(2n-1)$

   n) $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

2. Udowodnić za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:

   a) $5|n^5 - n$

   b) $2|n^2 + n$

   c) $19|(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$

   d) $30|n^5 - n$

   e) $6|n^3 - n$

   f) $6|n^3 + 5n$

3. Udowodnić za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:

   a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

   b) $2^n > n$

   c) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1$

   d) $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$

e) $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$ przy założeniu: $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Wniosek: nierówność Bernoulliego $\mathbf{(1+x)^n \geq 1+nx}$.

f) $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n$ jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$

Wniosek:

$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

g) $a^n + b^n \leq (a+b)^n$, $a, b \geq 0$

h) $(a+b)^n \leq 2^n(a^n+b^n)$, $a, b \geq 0$

i) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k = -n$

j) $(n+1)^n < n^{n+1}$ dla $n \geq 3$